École Supérieure de Gestion

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE PRIVÉ

CONCOURS D'ENTREE 1983

CONCOURS FORMULE G

Epreuve de MATHEMATIQUES 2 Durée : 3H Coefficient : 2

MARDI 19 AVRIL de 16H à 19H

h étant une fonction numérique de la variable réelle x
on désigne par $h^{(i)}$ la i ème dérivée de h.

I- Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $x \rightsquigarrow f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

1) Calculer en fonction de n l'expression de $f^{(n)}$

2) Etudier les variations de la fonction $f^{(n)}$ sur l'intervalle de $\mathbb{R}$: $[0,1[$

3) Soit la fonction F définie sur $]-1,1[$ telle que

$$x \in]-1,1[\rightsquigarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Etudier et représenter graphiquement cette fonction.

II- $b \in \mathbb{R}$ $b>0$ et $I = [-b,b]$ intervalle de $\mathbb{R}$

Soit g une fonction numérique définie sur I vérifiant les propriétés suivantes : - g est paire

- $\forall n \in \mathbb{N}$ g est n fois dérivable
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $g^{(n)}$ est continue sur I

1) Etudier l'existence des solutions de l'équation

$$(2b)^{n+1}\, g^{(n+1)}(x) = g(b) \times (n+1)! - \sum_{i=0}^{i=n} (2b)^i\, g^{(i)}(-b) \prod_{k=i+1}^{k=n+1} k$$

où x est l'inconnue appartenant à I

et où $\prod_{k=i+1}^{k=n+1} k = (i+1)\,(i+2) \times \ldots \times n(n+1)$

2) Démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}$ $g^{(2p+1)}(0) = 0$

III- 1) Déterminer la fonction polynome p_{2n} de degré 2n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$\forall i \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant i \leqslant 2n$ $p_{2n}^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$

f étant la fonction définie dans le I

2) En déduire $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}\,dx$

3) On suppose que $|x| < 1$ déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_{2n}(x)$ puis $\displaystyle\int_0^{1/2} \left[\lim_{n \to +\infty} p_{2n}(x)\right] dx$

FIN